T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 9

Wrocław, 9 maja 2010

ZADANIE 1. Wykaż, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (z metryką na przykład Euklidesową) pojęcia ograniczoności i całkowitej ograniczoności podzbioru są tożsame.

ZADANIE 2. Wykaż, że dowolny podzbiór A przestrzeni całkowicie ograniczonej (X, d) tworzy przestrzeń (A, d) również całkowicie ograniczoną.

ZADANIE 3. Rozważmy przestrzeń ciągów binarnych:

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\geq 1} : \forall_n \ x_n \in \{0,1\}\},$$

z metryką

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n|.$$

Czy jest to przestrzeń zwarta?

ZADANIE 4. Uzasadnij, że podzbiór zwarty przestrzeni X jest jej podzbiorem domkniętym.

ZADANIE 5. Wykaż, że podzbiór domknięty przestrzeni zwartej jest zwarty.

ZADANIE 6. Wykaż, że każda funkcja ciągła określona na zwartej dziedzinie jest jednostajnie ciągła.

ZADANIE 7. Udowodnij twierdzenie Ascoliego-Arzeli: podzbiór F przestrzeni $C([0,1])$ (z metryką supremum) jest całkowicie ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie funkcje $f \in F$ są wspólnie ograniczone i jednakowo jednostajnie ciągłe, czyli

$$\exists_{M>0} \ \forall_{f\in F,\, x\in[0,1]} \ |f(x)| < M,$$
$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{f\in F,\, x,y\in X} \ d(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Wskazówka: dowód implikacji $\implies$ *przeprowadzić niewprost; skonstruować ciąg funkcji odległych parami o pewien ustalony* $\epsilon > 0$.

ZADANIE 8. Wykaż, że w przestrzeni zwartej każdy ciąg zstępujący zbiorów domkniętych niepustych ma niepusty przekrój.

ZADANIE 9. Wykaż, że dowolne ciągłe różnowartościowe odwzorowanie h określone na zwartej dziedzinie X, w dowolną przestrzeń metryczną Y, jest homeomorfizmem pomiędzy X a $h(X)$ (czyli trzeba wykazać ciągłość odwzorowania h^{-1} określonego na $h(X)$.)

ZADANIE 10. Wykaż, że suma mnogościowa skończenie wielu przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą (nie zakładamy rozłączności).

ZADANIE 11. Niech (X_i, d_i) będą przestrzeniami metrycznymi dla $i = 1, 2, \ldots n$. W produkcie $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ będziemy rozważać metryki d_1 i d_2 określone jako ,,suma" i ,,supremum", czyli

$$d_1((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$
$$d_2((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sup_i d_i(x_i, y_i).$$

Wykaż, że X (w obu metrykach) jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie (X_i, d_i) są zwarte.

Tomasz Downarowicz